数学

平面几何

v3.1

目录

狂狼 WILD WOLF

[1] 概念

1 概念

维度：一组**相互独立**的属性的数量

- **任意**属性的取值与其他属性**无关**。
- 人类生活的空间有三个维度。

1 概念

对于属性的取值为**实数**的场景

可以用图形来表示取值的**范围**。

1 概念

维度与图形的**载体**

- **点**：最简单的图形，可以看作**零维**。
- **线**：一维载体。
- **面**：二维载体。

1 概念

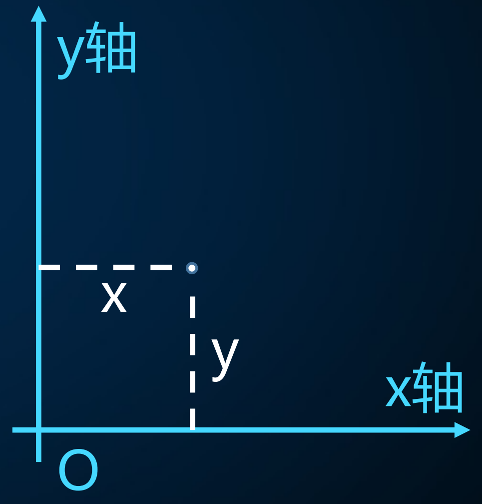
坐标系：对**点**进行**定位**的规则

常见的有**直角坐标系**与**极坐标系**，默认使用直角坐标系。

1 概念

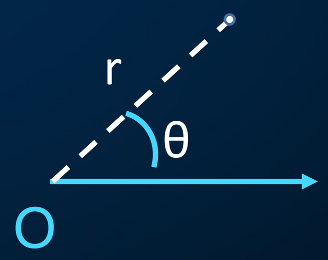
直角坐标系：用呈**直角**的不同**方向**表示维度

- 将**所有**维度的值均为0的点称为**原点**，用O表示。
- 将过原点的**水平**直线称为**x轴**，左小右大；
  将过原点的**垂直**直线称为**y轴**，下小上大。
- 点的坐标(x, y)就是原点在每个方向上的**偏移量**。
- 每个维度的表示是等价的，置换维度不影响**形状**。



极坐标系：用**旋转角**与**距离**表示维度

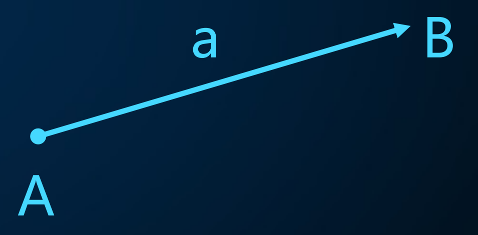
- **所有**维度的值均为0的点被称为**极点**，用O表示。
- 将极点**向右**发出的射线称为**极轴**，作为旋转角的**起点**。
- 点的坐标(r, θ)由**极径**r与**极角**θ表示。
- 极角是极轴**逆时针**旋转到穿过点的角度。
- 极径是点到原点的距离。



1 概念

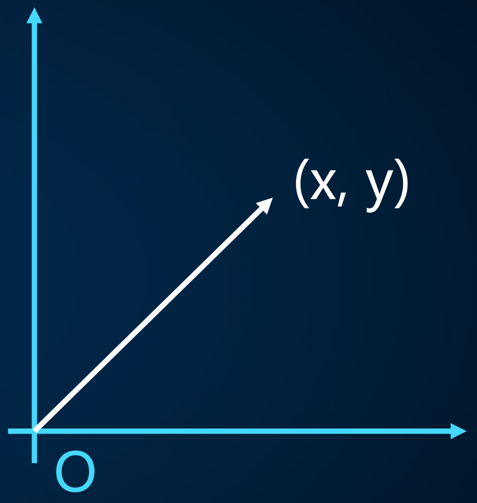
向量：拥有**大小**和**方向**的量

- 可以用A点到B点的**有向线段**$\overrightarrow{AB}$表示向量，**长度**就是向量的**大小**。
- 向量的大小被称为向量的**模**，记作|AB|。
- 长度为0的向量被称为**零向量**，是**唯一**方向不确定的向量。
- 长度为1的向量被称为**单位向量**，
  与向量a同方向的单位向量称为a的单位向量，记作a^0。
- 向量又被称为**矢量**。



向量没有位置属性

- 有向线段被**平移**后表示的是**同条**向量。
- 可以将有向线段的**起点**平移到**原点**，此时用**终点**就可以表示向量。



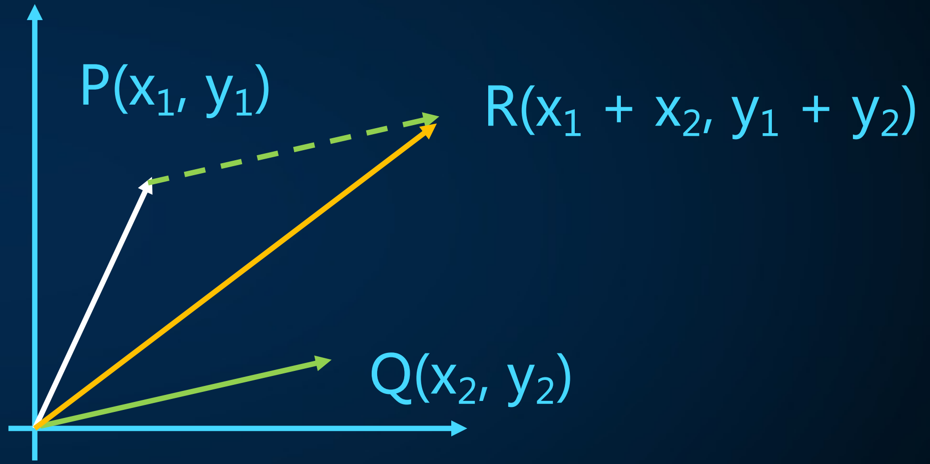
- 此时终点的坐标由有向线段两个点的**坐标差**组成。

1 概念

向量之间也可以进行运算

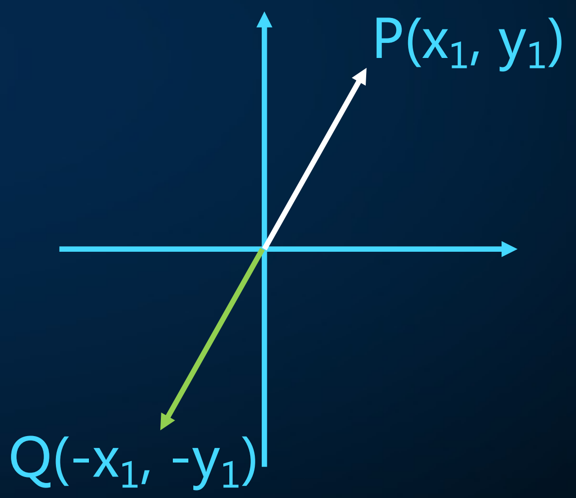
向量**加法**

- 对每个维度**分别**相加。
- 令$\overrightarrow{OP} = (x_1, y_1)$，$\overrightarrow{OQ} = (x_2, y_2)$，
  则$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}\ (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$。
- 相当于将两个向量**首尾相接**。
- 向量加法满足**交换律**，即$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP}$。



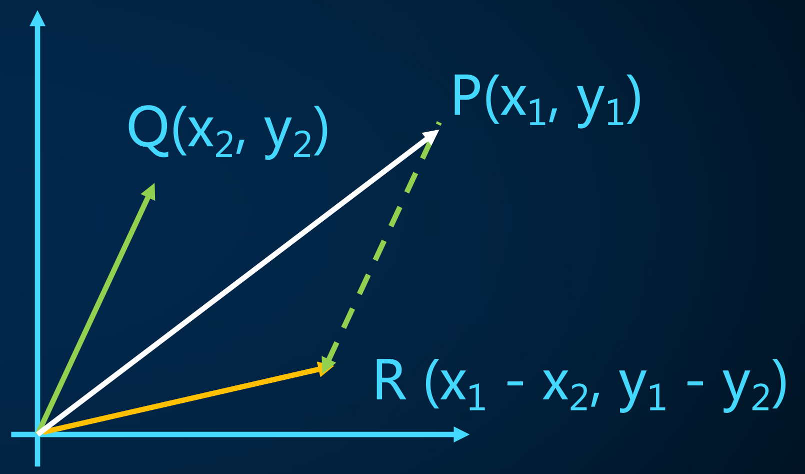
反向量：大小相同且方向相反的向量

- 令$\overrightarrow{OP}$ = (x_1, y_1)，则反向量$\overrightarrow{OQ}$ = $\overrightarrow{PO}$ = ($-x_1$, $-y_1$)。
- 向量与其反向量相加得到零向量，即$\overrightarrow{OP}$ + $\overrightarrow{OQ}$ = $\overrightarrow{OP}$ + $\overrightarrow{PO}$ = 0。



向量**减法**

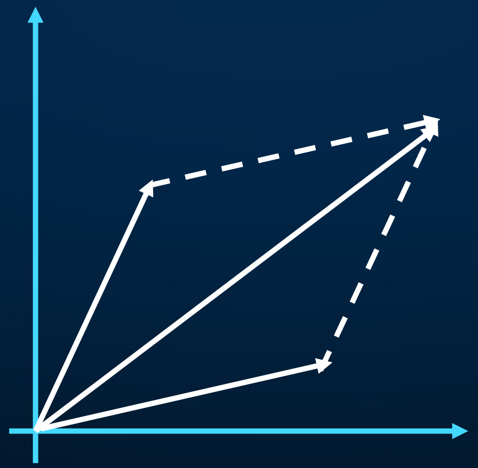
- 对每个维度**分别**相减。
- 令$\overrightarrow{OP}$ = (x_1, y_1)， $\overrightarrow{OQ}$ = (x_2, y_2)，
  则$\overrightarrow{OP}$ - $\overrightarrow{OQ}$ = $\overrightarrow{OR}$ (x_1 - x_2, y_1 - y_2)。
- 相当于被减向量加上减向量的反向量。



1 概念

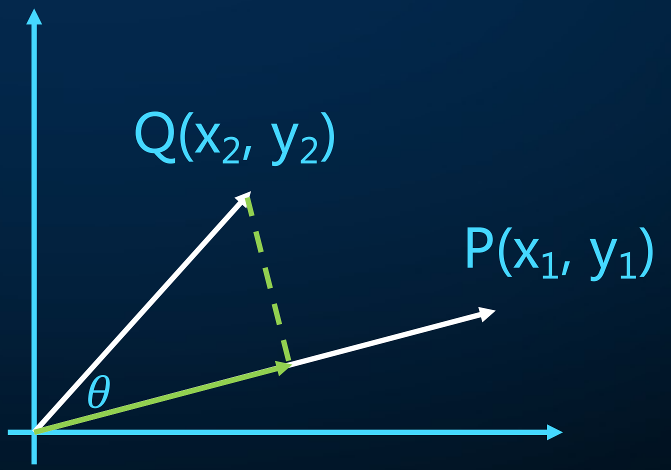
向量与实数的加减法**相似**

- 每个维度都是**独立**的实数运算。
- 向量加减法的规则被称为**平行四边形法则**



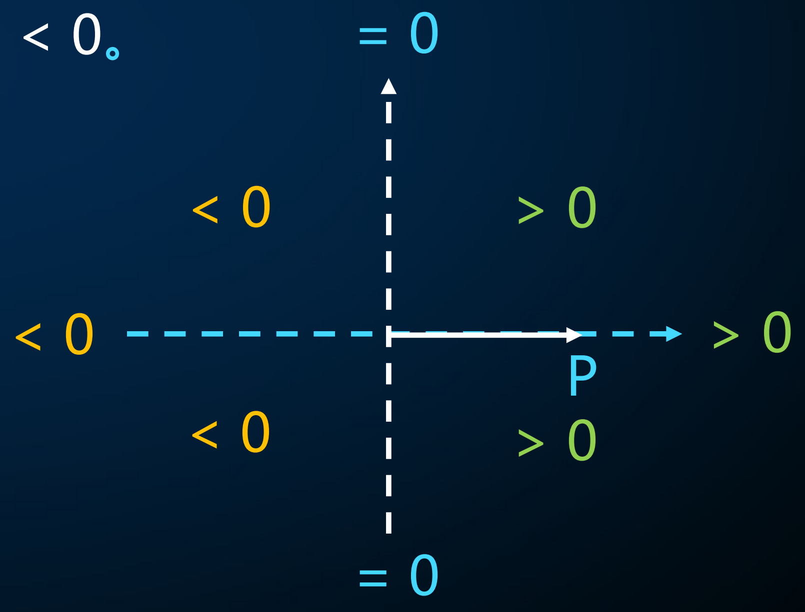
向量**点乘**

- 点乘符号为 • ，$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$，其中$\theta$为$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$的夹角。
即$\overrightarrow{OQ}$到$\overrightarrow{OP}$的**投影**长度与$\overrightarrow{OP}$的长度相乘。
- 点乘的结果被称为**点积**，又被称为**内积**，是**标量**。
令$\overrightarrow{OP} = (x_1, y_1)$，$\overrightarrow{OQ} = (x_2, y_2)$，则$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1 * x_2 + y_1 * y_2$。
- 向量点乘满足**交换律**。



点乘可以判断向量的**前后**关系

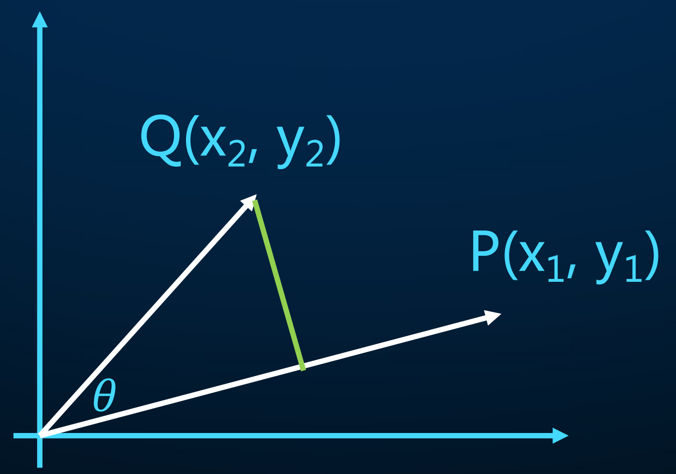
- 根据参照向量$\overrightarrow{OP}$建立直角坐标系，O为原点，$\overrightarrow{OP}$方向为x正轴。
- 当Q在一、四象限或x正轴上时，有$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} > 0$。
- 当Q在二、三象限或x负轴上时，有$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} < 0$。
- 当Q在y轴上时，有$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = 0$。



向量**叉乘**

- 叉乘符号为 ×，$|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OQ}|\sin\theta$，其中$\theta$为$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$的夹角。即Q到OP的距离与$\overrightarrow{OP}$的长度相乘。

- 叉乘的结果被称为**叉积**，又被称为**外积**，是**向量**。
令$\overrightarrow{OP} = (x_1, y_1)$，$\overrightarrow{OQ} = (x_2, y_2)$，则$|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = x_1 * y_2 - y_1 * x_2$。
方向为**右手系**，即右手四指从$\overrightarrow{OP}$弯向$\overrightarrow{OQ}$（小于π），此时拇指的方向。



1 概念

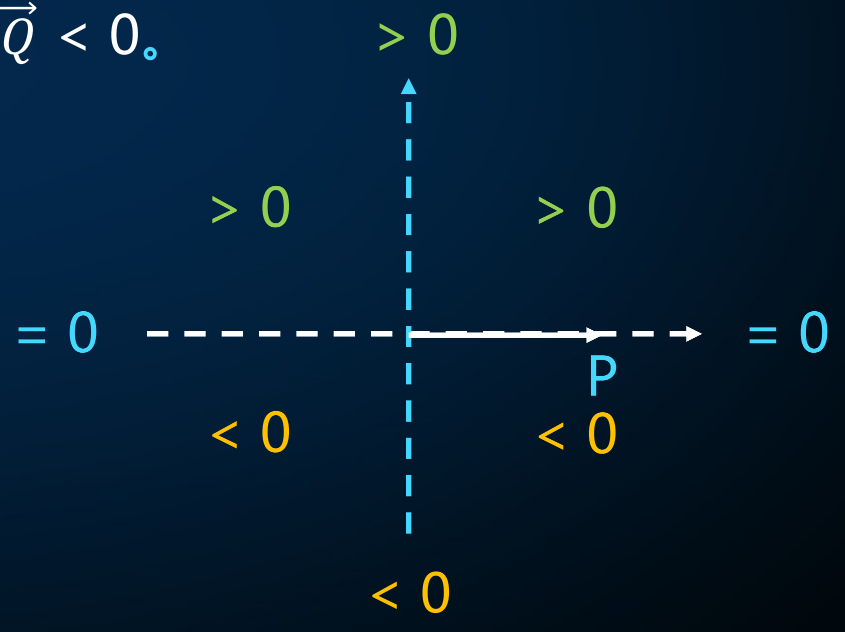
叉乘满足交换律吗？

- 不满足，交换后结果**方向**相反。
- $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = -(\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OQ} \times -\overrightarrow{OP}$

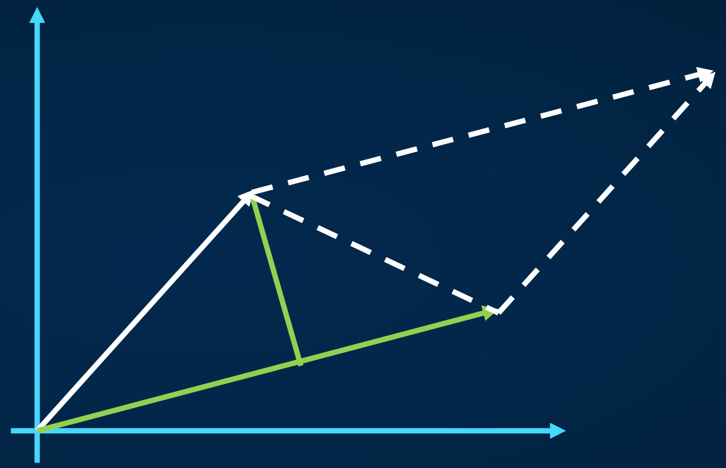
交换位置或者**取反**某个向量都会导致叉乘结果**反向**。

叉乘可以判断向量的**左右**关系

- 根据参照向量$\overrightarrow{OP}$建立直角坐标系，O为原点，$\overrightarrow{OP}$方向为x正轴。
- 当Q在一、二象限或y正轴上时，有$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} > 0$。
- 当Q在三、四象限或y负轴上时，有$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} < 0$。
- 当Q在x轴上时，有$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = 0$。



叉积的几何意义



- 叉积的**长度**等于两条向量构成的**平行四边形**的面积。
- 等于两条向量构成的**三角形**的面积的**两倍**。

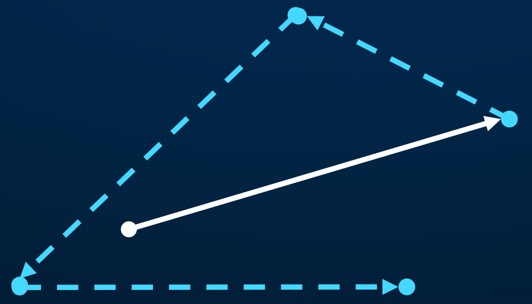
向量点乘与叉乘的特点

- 既可以根据**几何意义**进行运算，也可以直接对向量进行运算。
- 如果可以用**整数**坐标表示向量，则运算结果也一定是整数。
- 对于根据参照向量建立的直角坐标系，结合点乘与叉乘，可以判断出任意向量在该坐标系中的**方位**（象限、轴、原点）。

【例1】独眼兔

给定平面上n个点，令y坐标最小的点为(x_i, y_i)，求一条从$(0, y_i)$出发，依次经过每个点且**不能右拐**的折线路径。所有点都在第一象限。

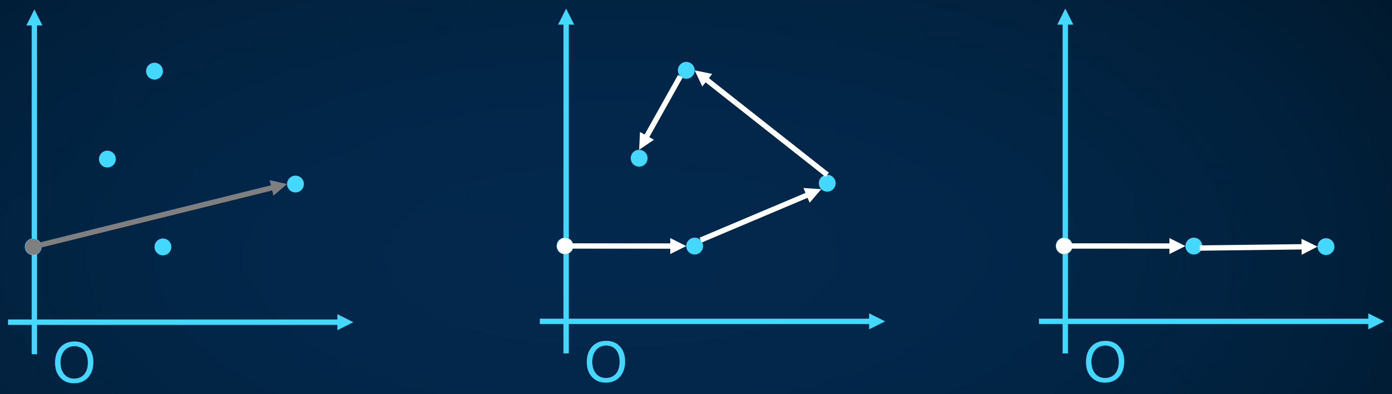
对于任意一段路径，如果**右边**还有剩下的点，由于不能右拐，所以只能**左拐绕圈**出去。



https://www.luogu.com.cn/problem/P1863

1 概念

- 起点在所有点的**左下方**，不可能通过左拐绕过，所以走的每一段路径都要保证剩下点全在**左边**。



- 从起点开始，每次走向**最靠右**的点就能满足要求。根据起点的位置，可知必定存在相对于起点最靠右的点。

- 如果有多个点同时最靠右，需要优先选取**最近**的点。

分析【例1】实现的时空复杂度

- 【T】寻找起点O(n)。
- 【T】路径段数O(n)，寻找下一段O(n) ，总共$O(n^2)$。
- 【T】总时间复杂度为**$O(n^2)$**。
- 【M】存储点**O(n)**。

【例2】极角排序

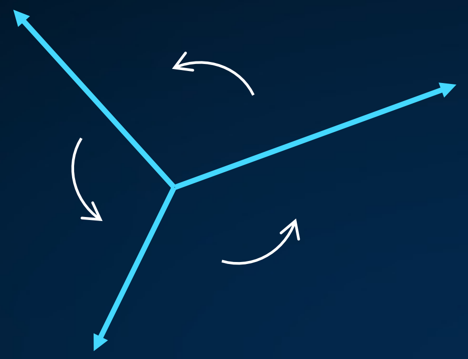
给定平面上n个点代表n条向量，要求将向量按照极角由小到大排序，极角相同时按照距离由小到大排序。

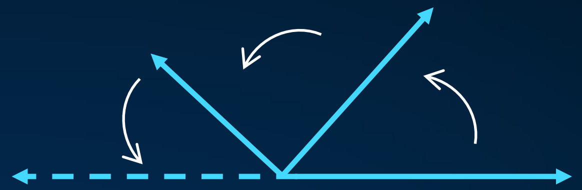
- 计算极角并排序比较复杂，而且会有精度误差。
- 极角的本质是旋转角，考虑利用叉乘判断**左旋**，从而不计算极角也能得到极角的大小关系。

https://www.luogu.com.cn/problem/T269230

1 概念

在2π的极角范围内，不断左旋可能会产生循环，从而无法判断出极角大小。





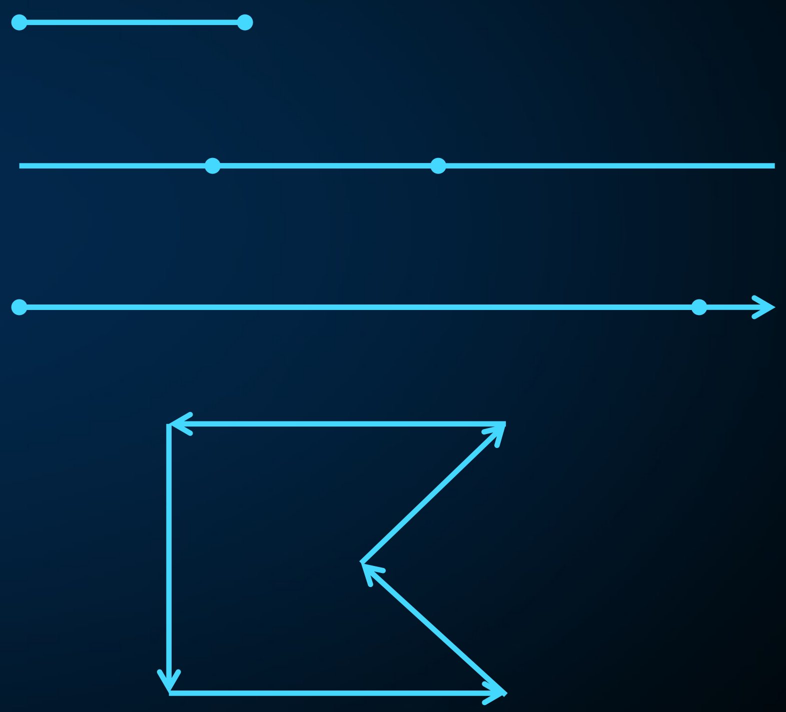
只有向量在角度范围小于π的范围内，旋转才不会产生循环。

先将极角范围分成**先上**[0, π)和**后下**[π, 2π)两个部分，
同部分内的向量再利用旋转判断先后。

极角排序变成了**上下**、**旋转**、**距离**三关键字比较排序。

图形的常用表示方法

- 两个**端点**可以表示一条**线段**。
- 直线上**任意**两点可以表示一条**直线**。
- 另一端点**足够远**的线段可以表示一条**射线**。
- 沿着**边**移动得到的**点序列**可以表示一个**多边形**。
  - 对于简单多边形，通常按照**逆时针**顺序移动。



数学

狂狼 WILD WOLF

[2] 应用

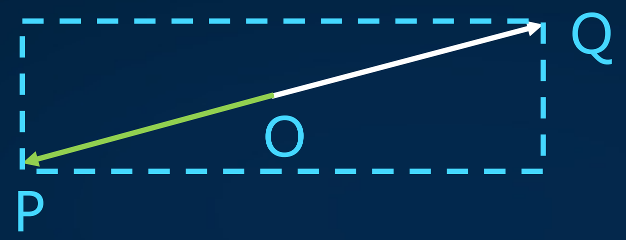
v3.1

判断点与直线的关系

- 点O在直线PQ上的**充要**条件是OPQ**三点共线**。

- 三点共线时有$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = 0$ 。

判断点与线段的关系



O在线段上

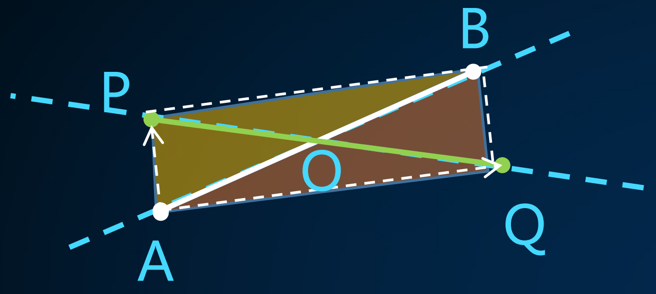
- 点O应该在直线PQ上。
- 点O应该在直线上PQ对应的范围内，即**横纵**坐标都在PQ之间。

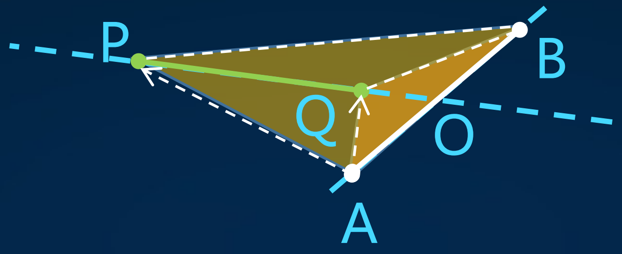
判断直线与直线的关系

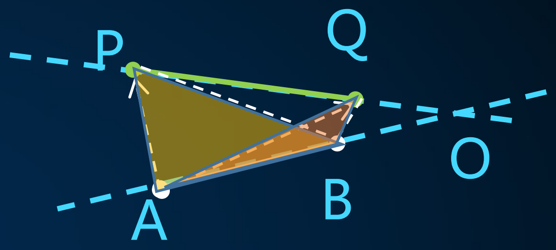
- 通过将两条直线的向量**叉乘**可以判断**平行**还是**相交**。
- 平行时有$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{AB} = 0$ 。
- 如果两条直线**平行**，再从一条直线上**任取**一点，检查是否在另一条直线上，由此判断**共线**。

计算直线的交点

- 首先判断直线是否刚好有**一个交点**。







- 令AB与PQ的交点为O，则$|PO| : |PQ| = S_{\triangle PAB} : S_{\triangle PAB} + S_{\triangle QAB}$。
- 根据P和Q的坐标以及**面积比**，可以算出O的坐标。
- 线段AB和PQ可能**没有交点**，导致面积为**负**，需要使用**叉乘**。

! 不要用三角形面积比，因为面积可能为0。

判断线段与线段的关系

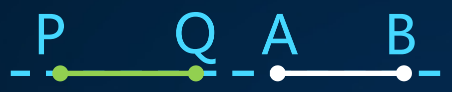
- **跨立试验**：**互相**判断一条线段的**两个端点**与另一条线段所在**直线**的关系。
- 存在一条线段的两个端点**均**在另一条直线的**同侧**，则**无交点**。
- 每条线段的端点**均**在另一条直线的**不同侧**，则**存在交点**，且交点**非端点**。

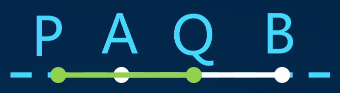
2 应用

- 通过**叉乘值**的**积**的**符号**可以判断是否同侧，但是结果可能会**很大**，导致**溢出**。
- 可能达到数据范围的**四次方**。
- 可以实现一个**取符号**函数，只保留叉乘值的符号。**正数**转换成1、**负数**转换成-1，0不作转换。

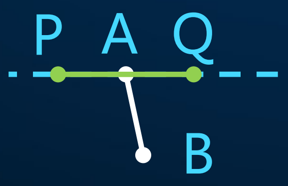
2 应用

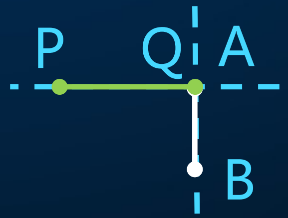
- 一条线段的端点在另一条**直线上**，需要进一步讨论。
- **四点共线**时，类似于一维问题。





- 否则，刚好有**一个交点**。

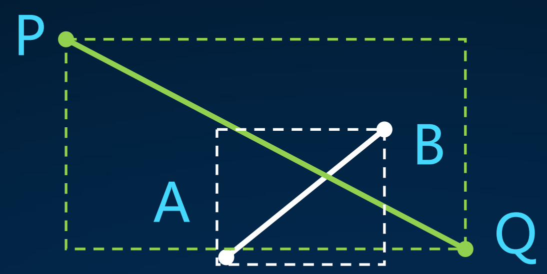




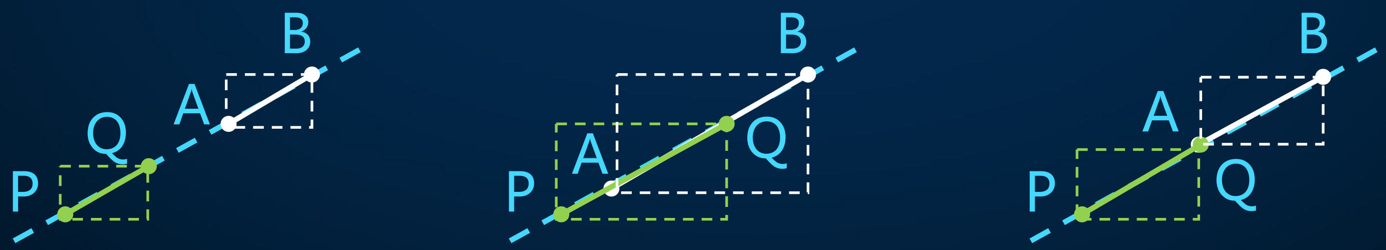
- 如果**各有**一个端点在另一条直线上，则交点在**公共端点**上。

2 应用

- **快速排斥试验**：分别用边**平行**于坐标轴的**最小**矩形包含线段，判断两个矩形是否有交集。



- 可以用于对**四点共线**的情况进行**补充**检查。



- **任意**维度交集为**空**，则**没有**交点；
两个维度交集**均**为**点**，则有**唯一**交点；
否则有**无穷**多个交点。

如何计算线段的交点？

- 首先检查线段是否有**唯一**交点。
- 如果有唯一交点，则线段的交点就是线段**所在直线**的交点。

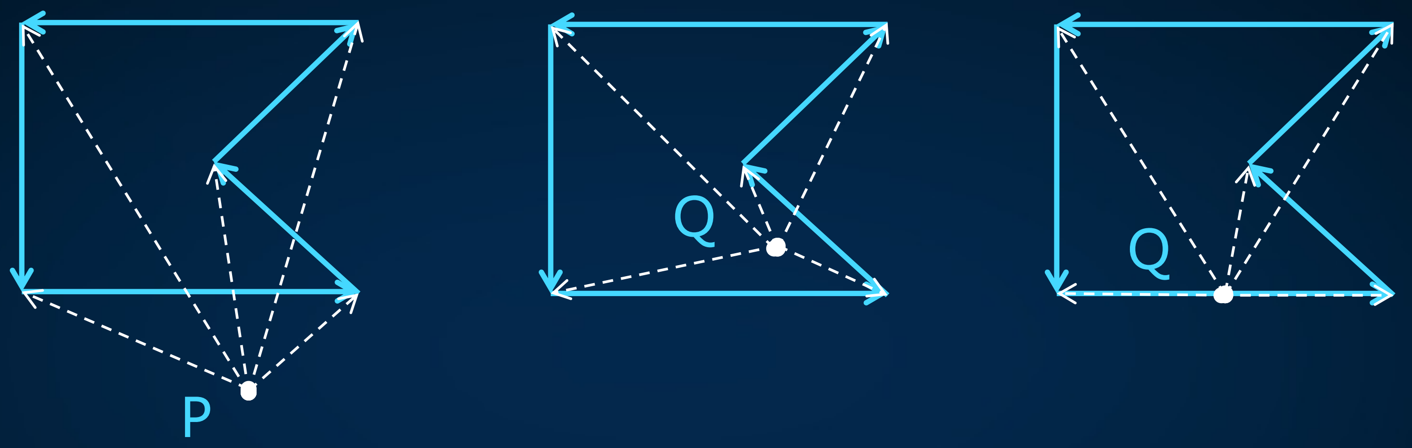
【例3】轰炸

给定平面上n个点，求一条直线能覆盖的最多点数。其中$n \le 700$。

- 任意两点可以确定一条直线。
- 可以枚举所有的直线，并统计每条直线上点的数量。

https://www.luogu.com.cn/problem/P1142

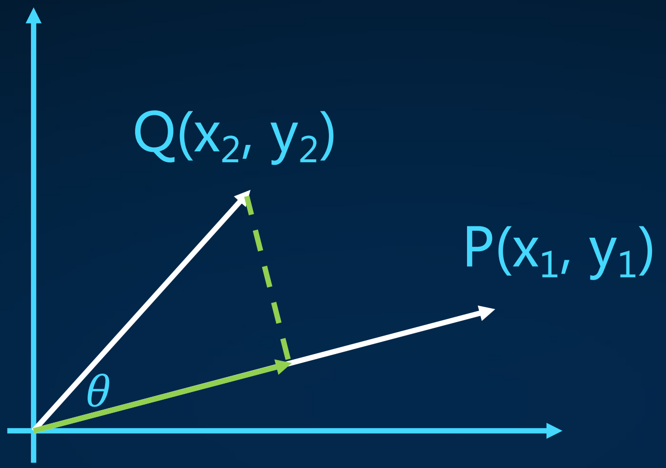
判断点与简单多边形的关系：角度法



- **逆时针**检查多边形的每一条边，
  计算旋转的**偏角和**，**左**旋**正**、**右**旋**负**。

- 总和为2π则在多边形**内部**，总和为0则在多边形**外部**。
  需要**特判**在**边上**的情况。

如何计算旋转角？



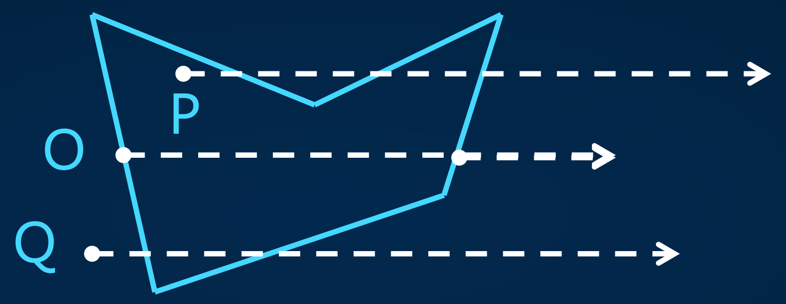
令$\overrightarrow{OP}$ = (x_1, y_1)、 $\overrightarrow{OQ}$ = (x_2, y_2)，利用**点乘**公式 $|\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OQ}|\cos\theta = x_1 * x_2 + y_1 * y_2$可以求出$\cos\theta$。

再用**反三角函数**求出θ，注意区分方向。

！需要考虑**精度误差**。

判断点与简单多边形的关系：**射线法**

- 从点向**右**作出一条**射线**，判断与多边形的**交点**数量。



- 考虑点沿着射线**移动**，每产生一个交点，将会**切换**在多边形**内外**的状态。

- 交点数量为**偶数**，则点在多边形**外**；
  交点数量为**奇数**，则点在多边形**内**。
  需要**特判**在**边上**的情况。

射线法有什么缺陷？

- 射线与多边形相交在**顶点**时，**不确定**是否会改变状态。
- 射线可能经过一条**共线**的边，此时交点的数量有**无限**个。

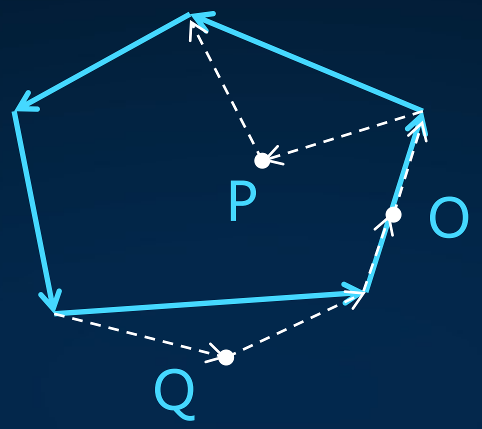
射线法改进策略1

- **水平**的边**不影响**状态的变化，可以**忽略**。
- 经过顶点改变状态时，该顶点必然**分别**是关联的两条边的**上**端点和**下**端点。
- 忽略所有**非水平**边的**上**端点。

射线法改进策略2

- 将射线**偏移**一个**极小**的角度，使得**不可能**与**任何**顶点相交。
- 只要横纵坐标的增量**互质**，就不可能产生**整数**交点。
- ！如果顶点坐标是**实数**，则可能出现问题。

判断点与凸多边形的关系



- **逆时针**检查多边形的每一条边。
- 如果点在**任意**边的**右侧**，则在多边形的**外部**。
- 否则，如果在任意边所在的**直线**上，则在该条**边上**。
- 否则，在多边形的**内部**。

【例4】神秘大三角

求点与三角形的关系，在内部、外部、边上或者点上。

- 三角形是凸多边形，直接判断点与凸多边形的关系。
- 不知道点的顺序是顺时针还是逆时针，需要设计通用的判别方法。
- 使用叉乘判断点和三条边的关系，统计正、零、负出现的**次数**。

https://www.luogu.com.cn/problem/P1355

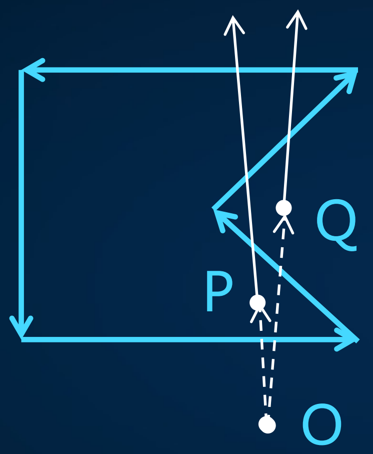
2 应用

- 在三角形**内部**的充要条件是**全正**或者**全负**。

- 在三角形**外部**的充要条件是**有正**且**有负**。
- 如果有**两个零**，则必然在**顶点上**。

- 否则必然有**一个零**，在**边上**。

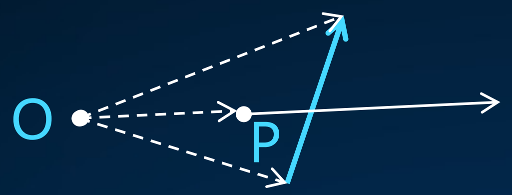
计算简单多边形的面积

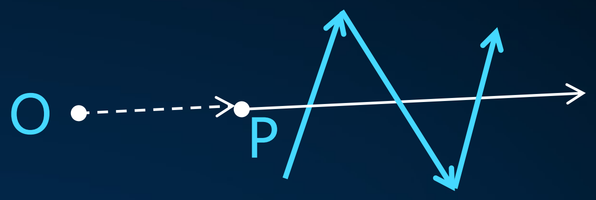


- **任选**参照点O，可以确定一条由**任意**点P发出的射线。通常直接选**原点**。
- 如果点P在多边形内，则射线与多边形的交点数量为**奇数**。

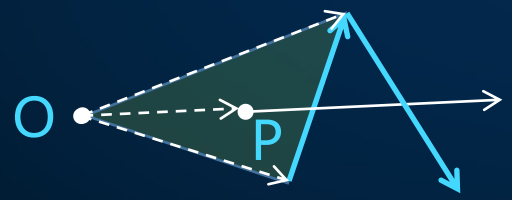
2 应用

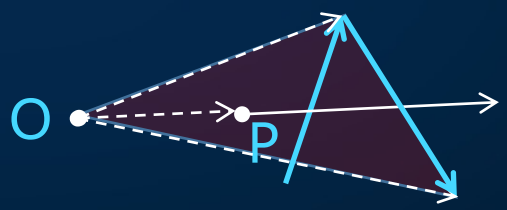
- 每次与多边形相交，O与相交的边都可以确定一个**包含**P的三角形。





- 相交的边一定在射线的两边**交替**横跨。

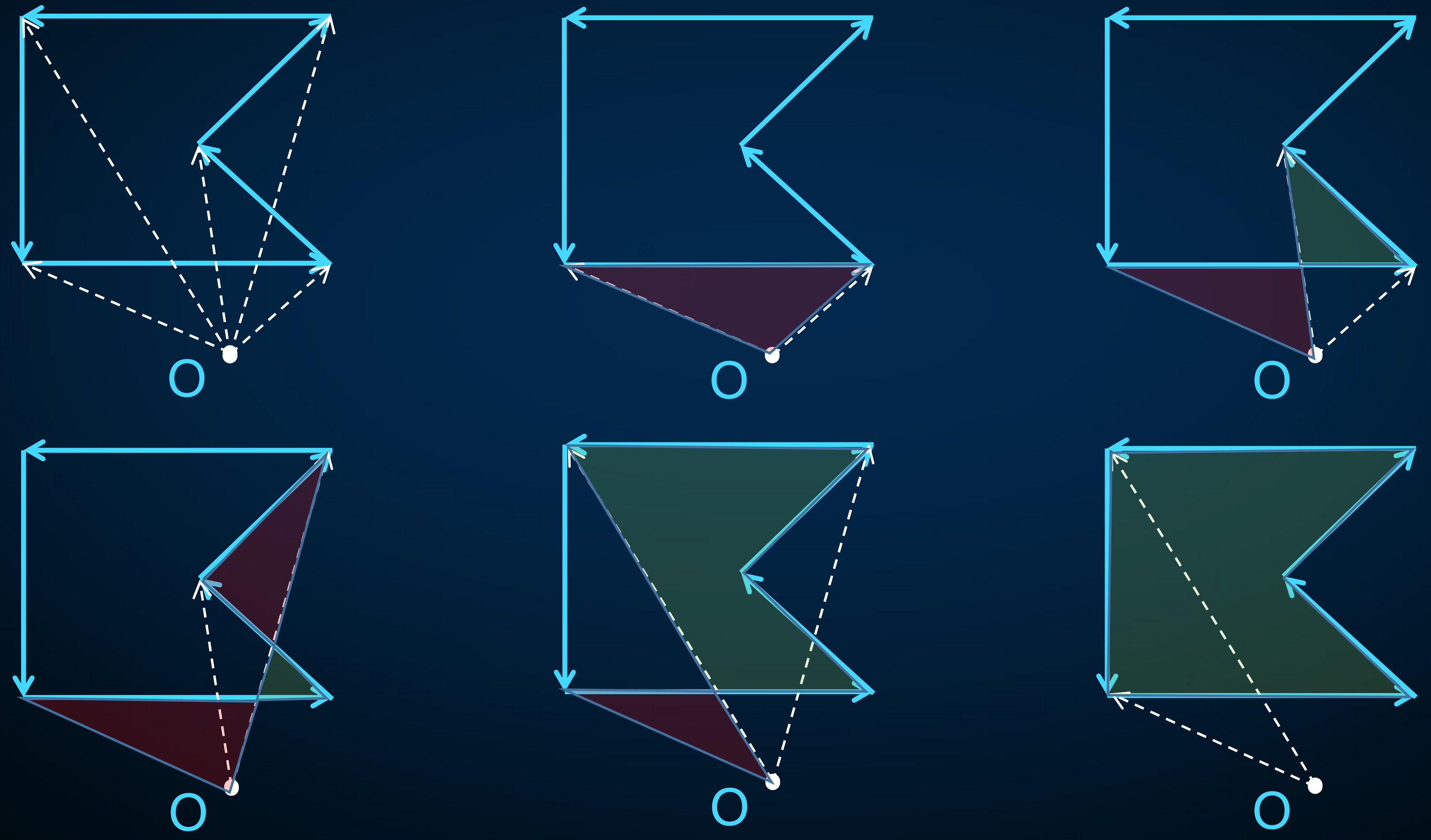




- **左旋**时认为三角形的面积为**正**，**右旋**时为**负**。
- 累加**所有**三角形的**面积**，则P刚好被计算一次。

2 应用

逆时针检查多边形的每一条边，
与参照点O形成的三角形的**面积和**就是多边形的面积。



谢 谢

狂狼

WILD WOLF